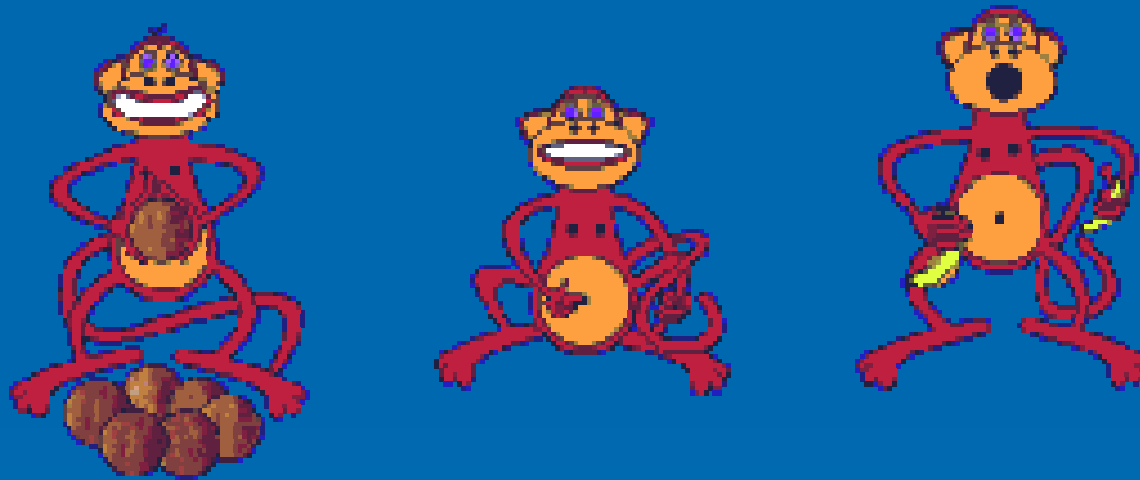


ALGOITMA SIMPLEKS MAKSIMUM



Oleh :
Zuriman Anthony, ST., MT

VARIABEL SLACK DAN SURPLUS

Suatu pertidaksamaan “lebih kecil atau sama dengan” seperti $5x_1 + 3x_2 \leq 30$ dapat dirubah menjadi suatu persamaan dengan menambahkan suatu variable slack $s \geq 0$, demikian rupa hingga $5x_1 + 3x_2 + s = 30$. Jika $5x_1 + 3x_2 = 30$, variable slack $s = 0$. Jika $5x_1 + 3x_2 < 30$, s adalah suatu harga positif yang sama dengan selisih antara $5x_1 + 3x_2$ dan 30.

Suatu pertidaksamaan “lebih besar atau sama dengan” seperti $4x_1 + 7x_2 \geq 60$ dirubah menjadi suatu persamaan dengan mengurangkan suatu variable surplus (subtracting a surplus variable) $s \geq 0$, sedemikian rupa hingga $4x_1 + 7x_2 - s = 60$. Jika $4x_1 + 7x_2 = 60$, variabel surplus $s = 0$. Jika $4x_1 + 7x_2 > 60$, s adalah suatu harga positif yang sama dengan selisih antara $4x_1 + 7x_2$ dan 60.

Contoh 5.1

Untuk soal berikut (a) Ubahlah kostren-kostren pertidaksamaan dalam suatu data berikut menjadi persamaan dengan menambahkan variable slack atau mengurangi variable surplus dan (b) nyatakan persamaan tersebut dalam bentuk matriks.

Maksimumkan $Z = 24y_1 + 8y_2$

Dibawah $2y_1 + 5y_2 \leq 40$ $10y_1 + 5y_2 \leq 60$

$4y_1 + y_2 \leq 20$ $y_1, y_2 \geq 0$

Jawaban :

(a) Untuk pertidaksamaan “lebih kecil atau sama dengan” ditambah variable slack.

Jadi : $2y_1 + 5y_2 + s_1 = 40$

$4y_1 + y_2 + s_2 = 20$

$10y_1 + 5y_2 + s_3 = 60$

(b) Bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Contoh 5.2

Mengulangi **Contoh 5.1** untuk yang berikut :

$$\text{Minimumkan} \quad Z = 60x_1 + 80x_2$$

$$\text{Di bawah} \quad 2x_1 + 3x_2 \geq 36 \quad , \quad 8x_1 + 2x_2 \geq 32$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 28 \quad , \quad x_1, x_2 \geq 0$$

Jawaban :

(a) Untuk pertidaksamaan " Lebih besar atau sama dengan ", di kurangkan variabel surplus :

$$2x_1 + 3x_2 - s_1 = 36 \quad 2x_1 + 2x_2 - s_2 = 28 \quad 8x_1 + 2x_2 - s_3 = 32$$

(b) Bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 28 \\ 32 \end{pmatrix}$$



CONTOH PENYELESAIAN SOAL



CONTOH PENYELESAIAN SOAL 1. SIMPLEKS MAKSIMUM

Maksimumkan: $Z = 5x_1 + 3x_2$

Di bawah konstren:

$$6x_1 + 2x_2 \leq 36$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 28$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. Tabel Simplex Permulaan

- i. Ubahlah pertidaksamaan menjadi persamaan dengan menambah variable-variable slack

$$6x_1 + 2x_2 + s_1 = 36, \quad 2x_1 + 4x_2 + s_3 = 28$$

$$5x_1 + 5x_2 + s_2 = 40$$

- ii. Nyatakan persamaan –persamaan dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 40 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Lanjutan: JAWABAN CONTOH SOAL 1.

- iii. Susun lah suatu tabel simplex permulaan yang terdiri dari matrik koefisien dari persamaan – persamaan konstren dan vector kolom dari konstan di letak kan di atas baris indicator yang adalah negative dari koefisien – koefisien fungsi obyektif dan suatu koefisien nol untuk masing – masing variable . elemen kolom konstan dari baris terakhir adalah juga nol sesuai dengan harga dari fungsi obyektif di titik asal kalau $x_1 = x_2 = 0$)

Tabel 5.1 (Tabel Simplek Permulaan)

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Konstren (batasan)
6	2	1	0	0	36
5	5	0	1	0	40
2	4	0	0	1	28
-5	-3	0	0	0	0

Indikator

Lanjutan: JAWABAN CONTOH SOAL 1.

iv. Penyelesaian mungkin dasar yang pertama dapat di baca dari tabel simplek permulaan tersebut dengan menetapkan $x_1 = 0$ dan $x_2 = 0$ seperti dalam contoh 3, $s_1 = 36$, $s_2 = 40$, $s_3 = 28$. pada penyelesaian mungkin dasar yang pertama tersebut fungsi obyektif mempunyai harga nol

2. Elemen Pivot dan Perubahan Asal

Untuk menaikkan harga dari fungsi obyektif suatu penyelesaian dasar yang baru di periksa. Untuk bergerak ke suatu penyelesaian mungkin dasar yang baru, suatu variable di masukan kedalam dasar dan salah satu variable yang mulanya pada dasar harus di keluarkan. Proses pemilihan variable yang di masukan dan variable yang di keluarkan tersebut di sebut perubahan dasar (change of basis)

- i. Indicator negative dengan harga absolute yang terbesar akan menentukan variable yang masuk ke dalam dasar kerana -5 dalam kolom pertama (atau x_1) merupakan indicator negative dengan harga absolute terbesar, x_1 menjadi kolom pivot dan di tunjukan dengan anak panah.
- ii. Variable yang di eliminasi di tentukan oleh rasio pemindahan (isplacemen ratio). Rasio pemindahan di peroleh dengan membagi elemen – elemen dari kolom konstan dengan elemen – elemen kolom pivot . baris dengan risio pemindahan yang terkecil (yaitu baris pivot) dengan mengabaikan rasio – rasio lebih atau sama dengan 0, akan menentukan dasar karena 36 memberikan

rasio yang terkecil ($\frac{36}{6}$, $\frac{40}{5}$, $\frac{28}{2}$), baris 1 merupakan baris pivot. Karena vector satuan dengan 1 dalam baris pertamanya berada dibawah kolom s_1 , maka s_1 akan meninggalkan dasar. Elemen pivotnya adalah 6, elemen perpotongan dari kolom variable yang memasuki dasar dan baris yang berhubungan variable yang meninggalkan dasar (yaitu elemen diperpotongan dari baris pivot dan kolom pivot).

3. Pivoting

Pivoting adalah proses penyelesaian m persamaan dalam n variable yang sedang dalam dasar. Karena hanya satu variable baru yang masuk dasar pada setiap langkah dari proses, dan langkah sebelumnya selalu melibatkan suatu matrik identitas, pivoting hanya mengikuti perubahan elemen pivot menjadi satu dan semua elemen-elemen lainnya dalam colom pivot menjadi nol, seperti dalam metode eliminasi Gaus sebagai berikut :

- i. Kalikan baris pivot dengan kebalikan (reciprocal) dari elemen pivot.

Tabel 5.2 (Dalam hal ini, kalikan baris dengan $1/6$)

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Konstren
1	1/3	1/6	0	0	6
5	5	0	1	0	40
2	4	0	0	1	28
-5	-3	0	0	0	0

ii. Setelah mereduksi elemen pivot menjadi satu, berekan kolom pivotnya, Disini kurangkan 5 kali baris1 dari baris 3, dan tambahkan 5 kali baris 1 ke baris 4. Ini memberikan **Tabel 5.3**

Tabel 5.3

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Konstren
1	1/3	1/6	0	0	6
0	10/3	-5/6	1	0	10
0	10/3	-1/3	0	1	16
0	-4/3	5/6	0	0	30



Penyelesaian mungkin dasar kedua dapat dibaca secara langsung dari tabel kedua. Dengan menetapkan $F_2 = 0$ dan $x_1 = 0$ kita ditinggali suatu matrik identitas yang memberikan $x_1 = 6$ $s_2 = 10$, dan $s_3 = 16$. Elemen terakhir dalam baris terakhir (hal ini, 30) merupakan harga dari fungsi objektif pada penyelesaian mungkin dasar yang kedua.

4. Optimisasi

Fungsi objektif dimaksimumkan kalau tidak terdapat indicator negative dalam baris terakhir. Dengan mengubah dasar dan pivoting terus menerus menerus kaidah diatas sampai ini dicapai. Karena $-4/3$ dalam kolom kedua merupakan satu-satunya indikator negative, maka x_2 dimasukkan ke dalam dasar ; = kolom 2 menjadi kolom pivotnya. Dengan membagi kolom konstan dengan kolom pivot memperlihatkan bahwa rasio terkecil adalah dalam baris kedua, jadi $10/3$ menjadi elemen pivot yang baru. Karena vector satuan dengan 1 dalam baris keduanya adalah dibawah s_2 , maka s_2 akan meninggalkan dasar untuk mempivot.

i. **Tabel 5.4** (Kalikan s_2 dengan $3/10$)

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Konstren
1	1/3	1/6	0	0	6
0	1	-1/4	3/10	0	3
0	10/3	-1/3	0	1	16
0	-4/3	5/6	0	0	30

- ii. Kemudian kurangkan $1/3$ kali baris 2 dari baris 1, $10/3$ kali baris 2 dari baris 3, dan tambahkan $4/3$ kali baris 2 ke baris 4 menghasilkan **Tabel 5.5**

Tabel 5.5

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Konstren
1	0	$1/4$	$-1/10$	0	5
0	1	$-1/4$	$3/10$	0	3
0	0	$1/2$	-1	1	6
0	0	$1/2$	$2/5$	0	34



Penyelesaian mungkin dasar yang ketiga dapat dibaca secara langsung dari tabel tersebut. Karena tidak terdapat indikator negative yang tertinggal dalam baris terakhir, ini merupakan penyelesaian optimal.

Elemen terakhir dalam baris terakhir menunjukkan bahwa pada $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, dan $s_3 = 6$, dengan fungsi objektif tersebut mencapai suatu maksimum pada $Z = 34$. Dengan $s_1 = 0$ dan $s_2 = 0$, tidak terdapat slack dalam 2 konstren yang pertama dan dua input yang pertama semuanya habis. Akan tetapi, dengan $s_3 = 6$, 6 unit dari input yang ketiga akan tersisa tidak dipakai.

CONTOH PENYELESAIAN SOAL 2. SIMPLEKS MAKSIMUM

Maksimumkan: $Z = 3y_1 + 4y_2$

Terikat pada $2,5y_1 + y_2 < 20$ $y_1 + 2y_2 < 16$

$3y_1 + 3y_2 < 30$ $y_1, y_2 > 0$

Jawaban :

1. Buatlah tabel simplex permulaan.

i. Tambahkan variable slack pada konstren untuk membuatnya menjadi persamaan.

$$2,5y_1 + y_2 + s_1 = 20, \quad 3y_1 + 3y_2 + s_2 = 30, \quad y_1 + 2y_2 + s_3 = 15$$

ii. Nyatakan persamaan-persamaan tersebut dalam bentuk metriks.

$$\begin{vmatrix} 2,5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 \\ 30 \\ 16 \end{vmatrix}$$

Lanjutan: JAWABAN CONTOH SOAL 2.

iii. Bentuklah tabel simplex permulaan yang disusun dari matriks koefisien dari persamaan konstrain dan vektor kolom konstan diletakkan di atas suatu baris indikator yang adalah negatif dari koefisien-koefisien fungsi obyektif dengan koefisien nol untuk variable slack.

Tabel 5.6 (Tabel permulaan) :

y_1	y_2	s_1	s_2	s_3	Konstren
5/2	1	1	0	0	20.....20/1
3	3	0	1	0	30.....30/3
1	2	0	0	1	16.....16/2 (terkecil)
-3	-4	0	0	0	0

Dengan menetapkan $y_1 = y_2 = 0$, menyelesaikan mungkin dasar yang yang pertama adalah $s_1 = 20$, $s_2 = 30$, dan $s_3 = 16$. Pada penyelesaian mungkin dasar yang pertama tersebut, $Z = 0$.

2. Merubah dasar. Indikator negatif dengan harga absolute terbesar (anak panah) menentukan kolom pivot. Rasio pemindahan yang terkecil yang muncul dan pembagian elemen-elemen kolom konstan dengan elemen-elemen kolom pivot menentukan baris pivot. Jadi, 2 menjadi elemen pivot dan kolom pivot.

3. Pivot.

i. Ubah elemen pivot menjadi 1 dengan mengalikan baris 3 dengan $\frac{1}{2}$

Tabel 5.6

y1	y2	s1	s1	s3	Konstren
5/2	1	1	0	0	20
3	0	1	0	0	30
$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	8 = 16/2 (terkecil)
-3	-4	0	0	0	0

- li Bereskan kolom pivot dengan menggunakan baris 3 dari baris 1, 3 kali baris 3 dari baris 2, dan tambahkan 4 kali baris 3 ke baris 4.

Tabel 5.7

y1	y2	s1	s1	s3	Konstren
2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	12
$\frac{3}{2}$	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	6 (pembagian terkecil)
$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	8
-1	0	0	0	2	32

4. Ubahlah dasar dan pivotnya lagi. Kolom₁ adalah kolom pivot, baris₂ baris pivot, dan $\frac{3}{2}$ adalah elemen pivot.
- i. Kalikan baris₂ dengan $\frac{2}{3}$.

Tabel 5.8

y1	y2	s1	s1	s3	Konstren
2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	12
1	0	0	$\frac{2}{3}$	-1	4
$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	8
-1	0	0	0	2	32

- ii. Bersihkan kolom pivot dengan mengurangkan 2 kali baris 2 dari baris 1, $\frac{1}{2}$ kali baris 2 dari baris 3, dan tambahkan baris 2 ke baris 4.

Tabel 5.9 (Tabel terakhir).

y1	y2	s1	s2	s3	Konstren
0	0	1	-4/3	3/2	4
1	0	0	2/3	-1	4
0	1	0	-1/3	1	6
0	0	0	2/3	1	36 (hasil yg dicari)

Karena tidak terdapat indikator negative yang tertinggal, tabel terakhir telah dicapai. Dengan mengoreksi fakta bahwa vektor-vektor dari matriks identitas adalah tidak pada tempatnya (out of order), $y_1 = 4$, $y_2 = 6$, $s_1 = 4$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$. dan $Z = 36$.

CONTOH PENYELESAIAN SOAL 3. SIMPLEKS MAKSIMUM

Maksimumkan $Z = 30x_1 + 24x_2 + 60x_3$

Terikat pada:

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 < 30$$

$$2x_1 + 2x_2 + 10x_3 < 50, \quad x_1, x_2, x_3 > 0$$

Jawaban :

Pertama, tambahkan variabel-variabel slack dan nyatakan persamaan-persamaan konstren dalam bentuk matriks.

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + s_1 = 30$$

$$2x_1 + 2x_2 + 10x_3 + s_2 = 50$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Lanjutan: JAWABAN CONTOH SOAL 3.

Kemudian, buatlah tabel permulaan:

Tabel 5.10 (Tabel permulaan):

x1	x2	x3	s1	s2	Konstren
6	3	5	1	0	30
2	2	10	0	1	50
-30	-24	-60	0	0	0

Dengan mengacu ke contoh sebelumnya, maka diperoleh:

(1) Kalikan baris 2 dengan $1/10$.

x1	x2	x3	s1	s2	Konstren	
6		3	5	1	0	30
1/5		1/5	1	0	1/10	5
-30		-24	-60	0	0	0

(2) Tabel berikutnya:

x1	x2	x3	s1	s2	Konstren	
5	2	0	1	-1/2	5	
1/5	1/5	1	0	1/10	5	
-18	-12	0	0	6	300	

(3) Kalikan baris 1 dengan $1/5$.

x1	x2	x3	s1	s2	Konstren	
1	2/5	0	1/5	-1/10	1	
1/5	1/5	1	0	1/10	5	
-18	-12	0	0	6	300	

(4) Tabel berikutnya:

x1	x2	x3	s1	s2	Konstren
1	2/5	0	1/5	-1/10	1
0	3/25	1	-1/25	3/25	24/25
0	-24/5	0	18/5	21/5	318

(5) Kalikan baris 1 dengan 5/2

x1	x2	x3	s1	s2	Konstren
5/2	1	0	1/2	-1/4	5/2
0	3/25	1	-1/25	3/25	24/5
0	-24/5	0	18/5	21/5	318

(6) Tabel berikutnya (tabel terakhir):

x1	x2	x3	s1	s2	Konstren
5/2	1	0	1/2	-1/4	5/2
-3/10	0	1	-1/10	3/20	9/2
12	0	0	6	3	330

Dalam kasus ini $x_1 = 0$, $x_2 = 2,5$, $x_3 = 4,5$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ dan $Z = 330$.

Semoga Sukses



Celestial Exploring
art by KAGAYA

©2003 KAGAYA / ©2003 Synforest / CD-ROM SW-008